

## ЛИНЗА ЛЮНЕБЕРГА В ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

© 2016 г. В. О. Гладышев, А. А. Терешин

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105082 Москва, Россия

E-mail: vgladyshv@mail.ru

Поступила в редакцию 08.07.2015 г.

Выполнен расчет отражения световых лучей эталонным микроспутником нового образца, движущимся по околоземной орбите радиусом 835 км со скоростью 7500 м/с. Спутник изготовлен в виде двухслойной линзы Люнеберга с внешним радиусом 85 мм. Впервые проведены расчеты процесса распространения электромагнитного излучения в линзе Люнеберга с учетом эффектов электродинамики движущихся сред и дисперсии оптического стекла. Показано, что движение линзы приводит к дополнительному отклонению и перемещиванию лучей, падающих на линзу под разными углами падения. Полученные результаты позволяют повысить точность определения координат спутника и открывают новые возможности для осуществления современных тестов теории относительности и электродинамики.

DOI: 10.7868/S0030403416030090

### ВВЕДЕНИЕ

Потенциальная высокая точность спутниковой лазерной дальнометрии определяет широкие возможности ее использования при измерении расстояний между земным наблюдателем и спутником, при решении задач космической геодезии, определении параметров вращения Земли, мониторинге движения тектонических плит, а также при решении различных фундаментальных задач.

Одним из способов повышения точности определения координат и времени не только спутника, но и земного наблюдателя является запуск эталонных низкоорбитальных спутников, содержащих набор уголкового отражателя. Эффективность использования различных типов уголкового отражателя зависит от оптического отклика системы отражателей [1], который, в свою очередь, сильно зависит от конструктивных особенностей отражателей и качества их изготовления.

В последнее время внимание стали уделять отражателям, исполненным аналогично градиентным линзам. Чаще всего в качестве основы предлагается брать сферическую линзу Люнеберга, которая при правильном подборе материалов и геометрических характеристик позволяет фокусировать падающее излучение в одной точке, а отраженное излучение оказывается практически параллельным падающему.

Отражатели, изготовленные на основе градиентных линз, являются хорошей альтернативой

кубическим уголкового отражателям [2]. Главным свойством таких отражателей является компенсация сферической абберации. Расчеты миниатюрных сферических отражателей на базе линзы Люнеберга [3–6] указывают на возможность увеличения диапазона горизонтальных углов зрения и хорошую возвращающую способность в диапазоне средних и длинных волн инфракрасного спектра.

Первая конструкция сферического отражателя была предложена в [7], а в работах [8–10] экспериментальный образец сферического отражателя был установлен на борту МЕТЕОР-3М, получены первые результаты работы. В дальнейшем была разработана модель эталонного микроспутника БЛИЦ на основе линзы Люнеберга [11].

Измерения оптического отклика спутника БЛИЦ показали, что отклик микроспутника в виде линзы Люнеберга сравним с оптическим откликом от классической матрицы уголкового отражателя, устанавливаемой на низкоорбитальных спутниках типа ERS-2 и Stella [12], что экспериментально подтверждает перспективность применения нового типа отражателей.

Вместе с тем описание процессов взаимодействия электромагнитного излучения с движущейся средой, а также с границей раздела сред обладает особенностями, которые могут быть существенными при решении задач космической геодезии.

В связи с этим возникает необходимость расчета основных характеристик отраженного лазер-

ного излучения в линзе Люнеберга, включая величину отклонения излучения на земной поверхности в плоскости локализации интерференционной картины с учетом эффектов электродинамики подвижных сред и дисперсии использованных оптических материалов.

Данная задача имеет также фундаментальное значение. Процессы распространения электромагнитного излучения в среде с трехмерным распределением поля скоростей при одновременном наличии нормальных и тангенциальных составляющих скоростей границ раздела сред мало изучены. Так, оценка углового отклонения светового луча, прошедшего во вращающейся атмосфере Солнца, показывает, что дополнительное отклонение составляет величину, сравнимую с гравитационным отклонением света. Поэтому эксперименты с микроспутниками в виде линзы Люнеберга открывают новые возможности по проверке общего решения дисперсионного уравнения, а также позволяют уточнить результаты экспериментов по проверке теории относительности.

#### БЕЗДИСПЕРСИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Объектом исследования являются процессы распространения электромагнитного излучения в автономной лазерной сферической стеклянной отражательной системе в виде линзы Люнеберга. В качестве примера будет рассмотрен процесс отражения излучения спутником БЛИЦ, который находился на солнечной геосинхронной круговой орбите в течение 3 лет. При помощи этого спутника изучались различные научные проблемы из области геофизики, геодинамики и теории относительности. Также он использовался для решения задач высокоточного измерения и долгосрочного прогнозирования орбит специализированных навигационно-геодезических космических аппаратов.

Высота орбиты спутника  $h = 835$  км, скорость движения по орбите  $v = 7500$  м/с  $= 0.000025c$ . При такой скорости движения на больших трассах ( $l \approx 10^6$  м) становятся заметными эффекты оптики движущихся сред.

Процесс распространения излучения зависит от особенностей конструкции и используемых материалов. Линза Люнеберга, которая использовалась в конструкции микроспутника, была двухслойной и состояла из центрального шара радиуса  $R_2 = 53.5$  мм и внешнего мениска радиуса  $R_1 = 85$  мм, при этом половина внешнего мениска имела зеркальное покрытие (рис. 1). В расчетах использовалась длина волны падающего лазерного излучения  $\lambda = 532$  нм. Центральный шар был изготовлен из тяжелого флинта с показателем преломления  $n_2 = 1.7647$ , а внешний мениск – из

легкого крона с показателем преломления  $n_1 = 1.4729$  на выбранной длине волны. Шар вращался со скоростью 10 об/мин вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты, создавая пульсирующий отраженный сигнал в плоскости регистрации на земной поверхности.

Основной задачей является определение степени влияния скоростной аберрации на траекторию лазерного луча в данной линзе с учетом поступательного движения спутника в диапазоне углов падения лучей  $(0, \dots, \vartheta_{\max})$ , для которых плотность распределения энергии в оптическом отклике имеет значение при его регистрации. Для этого, в конечном счете, необходимо определить вариацию координат точки б и угла преломления  $\vartheta_{13}$  (рис. 1) для всех падающих световых лучей. Если отклонение лучей, вызванное скоростной аберрацией, превысит поперечный размер приемника излучения, то влияние данного явления на формирование оптического отклика можно считать существенным.

Кроме того, так как преломление на движущейся границе раздела сред приведет к изменению частоты, целесообразно оценить влияние дисперсии материала на процесс распространения излучения.

При прохождении электромагнитного излучения через движущуюся среду на каждой границе раздела сред будут изменяться следующие параметры: частота, нормальная и тангенциальная проекции волнового вектора к поверхности раздела сред, а также фазовая и групповая скорости света. Это, в свою очередь, приведет к изменению траекторий лучей, а также времени распространения в линзе.

В общем случае также необходимо учитывать, что если падающее излучение поляризовано, то будут изменяться компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , что приведет к повороту поляризации. Однако если излучение не поляризовано или в нем присутствуют обе компоненты поляризации, этим эффектом можно пренебречь в первом приближении.

Для рассматриваемой задачи можно ограничиться двумерным случаем траектории волнового вектора плоской монохроматической электромагнитной волны в движущейся среде.

Квадрат интервала между соседними точками траектории светового луча в плоскости  $XOZ$  равен  $ds^2 = dx^2 + dz^2$ . Разделив поочередно на  $dx^2$  и  $dz^2$  с учетом, что  $ds = \frac{c}{n_2} dt$ ,  $dz/dx = \operatorname{tg} \vartheta_2$ , запишем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{n_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_2(x, z)}}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_2} \frac{\operatorname{tg} \vartheta_2(x, z)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_2(x, z)}}. \quad (1)$$

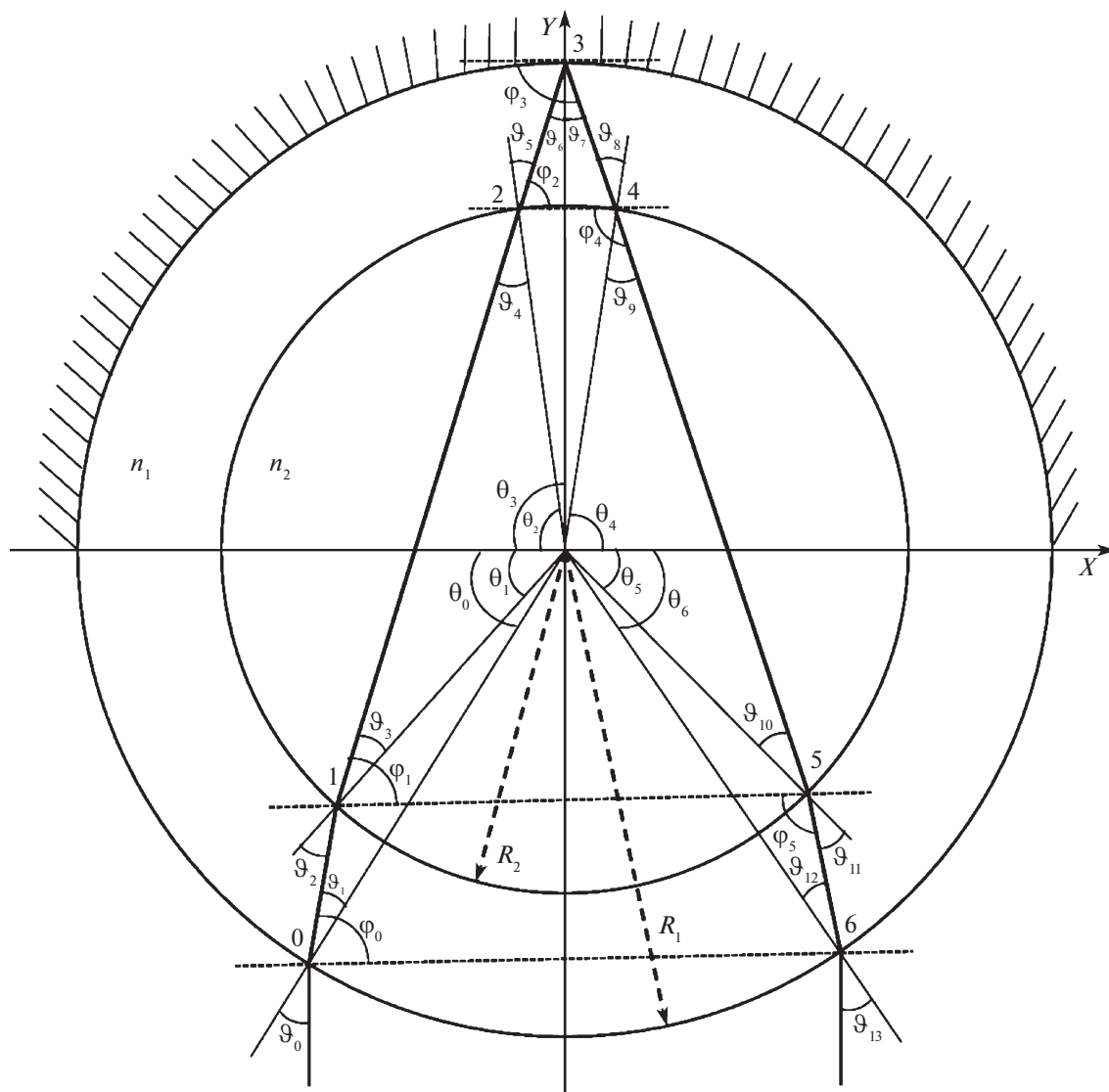


Рис. 1. Траектория луча внутри линзы Люнеберга.

Здесь  $c$  – скорость света в вакууме,  $\vartheta_2(x, z)$  – угол преломления на границе раздела двух сред.

Дифференциальные уравнения описывают эволюцию волнового вектора в среде со сложным движением, причем если используется зависимость показателя преломления от координат  $n_2(x, z)$ , решения уравнений (1) будут учитывать вклад дисперсии.

Из (1) следует, что во вращающейся линзе Люнеберга возникает эффект искривления траекторий световых лучей, что приводит к дополнительному отклонению отраженного излучения. При угловой скорости вращения спутника БЛИЦ 10 об/мин этот эффект существенно меньше отклонения лучей, вызванного орбитальным движением со скоростью 7500 м/с.

Поэтому для требуемой точности можно использовать сшивку решений, полученных для участков траектории волнового вектора между границами раздела сред, считая эти участки траектории прямолинейными.

Так как в уравнения (1) входит функция  $\vartheta_2(x, z)$ , необходимо найти зависимость нормальной проекции волнового вектора от координат  $x, z$ .

Для описания процесса распространения электромагнитного излучения воспользуемся координатным решением дисперсионного уравнения [13], которое было проверено в работах [14, 15] при тангенциальном разрыве скорости. В рассматриваемой задаче присутствует нормальная составляющая скорости раздела сред, что представляет интерес с точки зрения проверки элек-

тродинамики в общем случае движения сред и их границ раздела.

Пусть на первую поверхность линзы Люнеберга в положительном направлении оси ОХ (рис. 1) падает плоская монохроматическая волна. Тогда считаются заданными инварианты  $\mathbf{k}_i = \mathbf{I}_i$  и комбинация  $I_i = k_n v - \omega_e$ , где  $k_n = (\mathbf{k}, \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$  – скорость границы раздела сред,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности раздела, который мы считаем направленным из первой среды во вторую.

Дисперсионные уравнения для каждого  $i$ -го слоя среды имеют вид

$$\mathbf{k}_i^2 - \frac{\omega_i^2}{c^2} - \frac{\kappa_i (\omega - \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i)^2}{c^2 (1 - \beta_i^2)} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{k}_i$  – волновой вектор электромагнитной волны в  $i$ -м слое среды,  $\kappa_i = \epsilon_i \mu_i - 1$ ,  $\beta_i = \frac{u_i}{c}$ ,  $u_i$  – скорость  $i$ -го слоя среды,  $\epsilon_i, \mu_i$  – диэлектрические и магнитные проницаемости сред.

В случае, когда дисперсией среды можно пренебречь, используем решение

$$(k_{in})_{1,2} = \frac{I_1 \beta + \kappa_i \gamma_i^2 (\beta - \beta_{in}) (1 - d\beta_{in}) \pm Q_i^{1/2}}{c (1 - \beta^2 - \kappa_i \gamma_i^2 (\beta - \beta_{in})^2)}, \quad (3)$$

$$Q_i = 1 + \kappa_i \gamma_i^2 (1 - \beta_{in}^2) - d^2 [1 - \beta^2 - \kappa_i \gamma_i^2 (\beta - \beta_{in})^2] - \kappa_i \gamma_i^2 d\beta_{in} [2(1 - \beta\beta_{in}) - (1 - \beta^2)d\beta_{in}],$$

$$\mathbf{d} = c\mathbf{I}_i / I_1, \quad \kappa_i = \epsilon_i \mu_i - 1, \quad \gamma_i^{-2} = 1 - \beta_i^2,$$

$$\beta_i = \frac{\mathbf{u}_{it} + \mathbf{u}_{in}}{c}, \quad \beta = v/c.$$

Здесь  $\mathbf{u}_{it}$ ,  $\mathbf{u}_{in}$  – это тангенциальная и нормальная составляющие скорости движения первой среды на границе раздела. Из формулы (3) получим два значения для частоты в среде, выраженные через инварианты  $I_1$  и  $I_i$ , через параметры среды ( $\epsilon_1, \mu_1, u_1$ ) и скорость границы раздела  $\mathbf{v}$ . Одно из этих значений определяет частоту падающей волны, а другое – частоту отраженной волны.

Аналогичным образом можно записать выражения для нормальной компоненты волнового вектора для каждого слоя среды, которые после-

довательно проходит излучение при своем распространении в линзе.

Частоту электромагнитной волны можно вычислить по формуле

$$\omega_i = k_{ni} \beta c + I_1. \quad (4)$$

Угол преломления или отражения электромагнитной волны  $\vartheta_i$  определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \vartheta_i(x, z) = k_{ii}(x, z) / k_{ni}(x, z), \quad k_{ii} = (\omega_i / c) \sin \vartheta_0.$$

Новое значение фазовой скорости света в среде можно выразить через проекцию волнового вектора

$$c_i = \frac{(k_{ni} \beta c + I_1) \cos(\vartheta_i)}{|k_{ni}|}, \quad (5)$$

где  $\vartheta_i$  – угол преломления,  $i = 0, 1, \dots, 6$ .

Геометрический ход световых лучей можно задать с помощью кинематических уравнений, совместное решение которых позволяет найти 4-координаты всех точек траектории.

Определим координаты  $k$ -й точки встречи светового луча с границей раздела двух сред. Для этого запишем систему из трех уравнений, в которую входят уравнение, описывающее в двумерном случае движущуюся сферическую оптическую поверхность, и уравнение светового луча, записанного в параметрическом виде

$$\begin{cases} (x_k - v_x(t_k + T))^2 + (y_k - v_y(t_k + T))^2 = R_{1,2}^2, \\ k = 1, 2, \dots, 6, \\ x_k = x_{k-1} \pm c t_k \cos(\varphi_i), \\ y_k = y_{k-1} \pm c t_k \sin(\varphi_i), \end{cases} \quad (6)$$

где  $T = \sum_{k=1}^i t_{k-1}$  – суммарное время распространения светового луча от момента падения на первую поверхность линзы до рассматриваемого слоя

при расчете распространения луча от  $(k - 1)$ -й до  $k$ -й точки. Эта величина позволяет учесть смещение координат центра линзы на каждом этапе расчета. Также для удобства описания введен  $\varphi_j$  – вспомогательный угол, вычисление которого приведено ниже. Знак выбирается следующим образом: “+” соответствует случаю до отражения луча в точке 3, а “–” для случая после отражения луча в точке 3.

Решение системы уравнений (6) при распространении лазерного излучения от точки 0 до точки 3 до отражения имеет вид

$$t_{1,2} = \frac{-2(-T v_x + x_{k-1})(c_i \cos(\varphi_i) - v_x) + 2(-T v_x + y_{k-1})(c_i \sin(\varphi_i) - v_y) \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_0}}{2((c_i \sin(\varphi_i) - v_y)^2 + (c_i \cos(\varphi_i) - v_x)^2)}. \quad (7)$$

Для случая, когда луч отразился от внутренней стороны мениска, т.е. для точек 3–6 получим аналогичное выражение, но везде перед коэффициентом  $c_i$  появится знак “–”, кроме выражения под корнем  $\sqrt{b_2^2 - 4a_2c_0}$ .

После подстановки в (6) получим две пары возможных координат, из которых необходимо

выбрать значения в соответствии с направлением распространения луча.

Воспользуемся каноническим видом уравнений для нормали к окружности и падающего луча. Тогда для угла падения луча  $\vartheta_i$ , который зависит от скорости движения и времени распространения луча, получим

$$\cos(\vartheta_i) = \frac{|(x_k - v_x(t_k + T)) \cos(\varphi_j) + (y_k - v_y(t_k + T)) \sin(\varphi_j)|}{\sqrt{(x_k - v_x(t_k + T))^2 + (y_k - v_y(t_k + T))^2}}. \quad (8)$$

Для вычисления вспомогательных углов  $\varphi_j$  запишем уравнение нормали, проведенной в  $i$ -ю точку, и уравнение луча, проходящего через эту же точку (рис. 1). Далее необходимо определить,

исходя из записанных уравнений, коэффициенты наклона нормали и луча. Тогда при помощи несложных математических преобразований можно получить выражение для углов  $\varphi_j$

$$\varphi_j = \arctg \left( \frac{\text{tg}(\vartheta_{i+1})(t_k + T)v_x - \text{tg}(\vartheta_{i+1})x + (t_k + T)v_y - y}{\text{tg}(\vartheta_{i+1})(t_k + T)v_y - \text{tg}(\vartheta_{i+1})y - (t_k + T)v_x + x} \right). \quad (9)$$

Для определения величины отклонения луча на выходе из линзы по отношению к падающему лучу найдем угол наклона нормали по отношению к оси  $Ox$

$$\theta_m = \arctg \left( \frac{y_0 - v_y(t_k + T)}{x_0 - v_x(t_k + T)} \right), \quad m = 0, \dots, 6. \quad (10)$$

Сравним значения  $\Delta\vartheta_0$  и  $\Delta\vartheta$ , которые определим следующим образом:

$$\Delta\vartheta_0 = |\vartheta_0 + \theta_0| - |\vartheta_{13} + \theta_6|; \quad (11)$$

$$\Delta\vartheta = |\vartheta_0 + \theta_0| - |\vartheta_{13} + \theta_6|; \quad \delta\vartheta = \Delta\vartheta - \Delta\vartheta_0.$$

Здесь  $v = 0$  для  $\Delta\vartheta_0$  – разница между суммарным значением угла падения  $\vartheta_0$  луча на входе в линзу и угла  $\theta_0$ , определяющего нормаль, проведенную через точку 0 и суммарным значением угла преломления  $\vartheta_{13}$  на выходе луча из линзы и угла  $\theta_6$ , определяющего нормаль, проведенную через точку 6 (при отсутствии скорости движения линзы),  $v \neq 0$  для  $\Delta\vartheta$  – разница между суммарным значением угла падения  $\vartheta_0$  луча на входе в линзу и угла  $\theta_0$ , определяющего нормаль, проведенную через точку 0 и суммарным значением угла преломления  $\vartheta_{13}$  на выходе луча из линзы и угла  $\theta_6$ , определяющего нормаль, проведенную через точку 6 (при наличии скорости движения линзы),  $\delta\vartheta$  – разница между  $\Delta\vartheta$  и  $\Delta\vartheta_0$ .

Зная величины  $\Delta\vartheta_0$  и  $\Delta\vartheta$ , вычислим величину отклонения луча относительно детектора после его отражения линзой Люнеберга с учетом ее движения по орбите

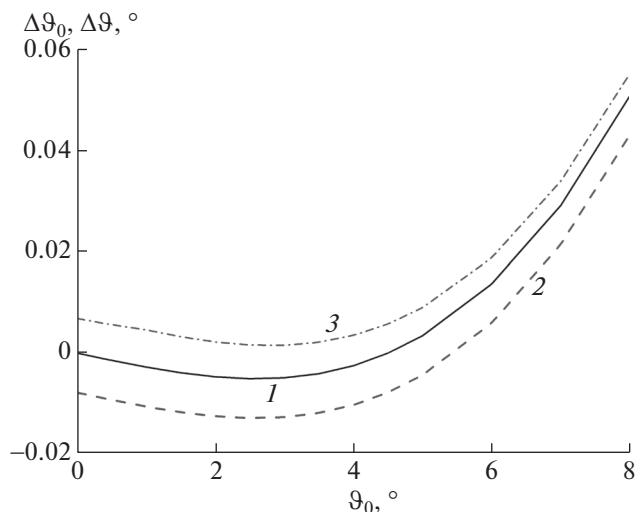
$$\Delta l_0 = \text{tg}(\Delta\vartheta_0)h; \quad \Delta l = \text{tg}(\Delta\vartheta)h; \quad (12)$$

$$\delta l = \text{tg}(\delta\vartheta)h.$$

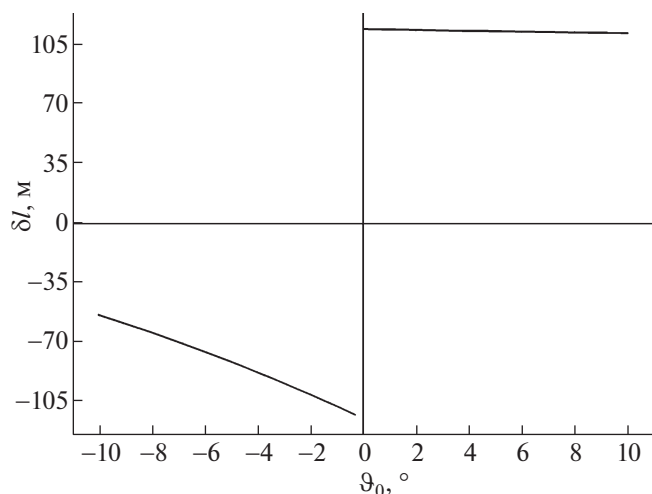
Здесь  $\Delta l_0$  – расстояние, на которое отклонится луч при попадании его на поверхность Земли при отсутствии скорости движения линзы;  $\Delta l$  – расстояние, на которое отклонится луч с учетом скорости движения спутника по орбите порядка 7500 м/с;  $\delta l$  – разница между  $\Delta l$  и  $\Delta l_0$ .

Полученные выражения позволяют выполнять расчеты траекторий распространения световых лучей, падающих на линзу Люнеберга под разными углами падения.

На основе численных расчетов были построены зависимости разностей  $\Delta\vartheta$  и  $\Delta\vartheta_0$  от угла падения  $\vartheta_0$  луча на линзу (рис. 2). Как видно из полученных графиков, кривые 1 (случай покоя линзы) и 2 (случай движения линзы в положительном направлении оси  $x$ ) на интервале углов падения от  $0^\circ$  до примерно  $4.5^\circ$  уходят в отрицательную область. Стоит отметить, что график 2 (рис. 2), построенный для ненулевой скорости движения линзы (луч падает на линзу слева, распространяется по ходу движения линзы), расположен ниже кривой 1 (случай покоя линзы), а кривая 3 (случай падения луча на линзу справа, против движения линзы) – выше кривой 1. Это можно объяснить тем, что для лучей справа и слева от оси линзы знак проекции скорости границы раздела на нормаль к границе различен. При движении линзы в положительном направлении оси  $Ox$  для лучей слева от оси знак “+”, а для лучей справа – знак “–”.



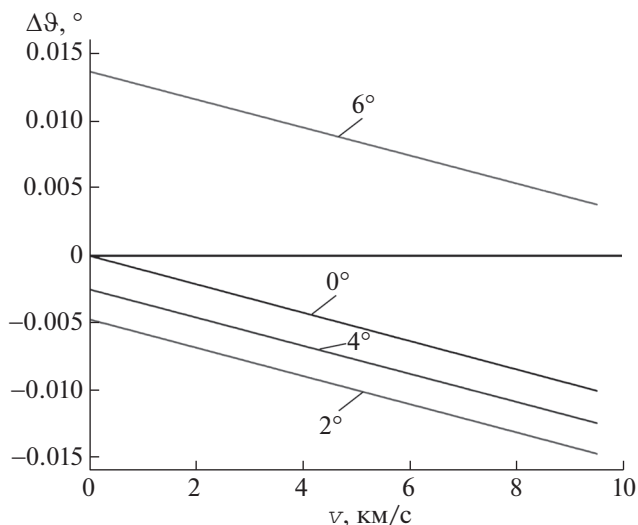
**Рис. 2.** Зависимости угла отклонения отраженного луча  $\Delta\vartheta_0$  и  $\Delta\vartheta$  от угла падения  $\vartheta_0$ : при отсутствии движения линзы ( $\Delta\vartheta_0(\vartheta_0)$ , 1) и при движении линзы ( $\Delta\vartheta(\vartheta_0)$ ), падение луча на линзу слева – 2 и справа – 3).



**Рис. 3.** Зависимость разницы  $\delta l$  от угла падения  $\vartheta_0$  при падении луча слева (правая часть графика) и справа (левая часть графика).

В результате отраженные “правые” и “левые” лучи при заданном  $|\Delta\vartheta_0|$  стремятся в разные направления отражения.

Аналогичный вид имеют графики зависимостей  $|\Delta l_0(\vartheta_0)|$ ,  $|\Delta l(\vartheta_0)|$ , которые можно построить согласно формуле (12). Схожесть поведения зависимостей можно объяснить тем, что в пределах рассматриваемого интервала углов от  $0^\circ$  до  $10^\circ$   $\text{tg}(\Delta\vartheta) \sim \Delta\vartheta$ . Так, для угла падения, равного  $1^\circ$ , величина отклонения луча относительно детекто-



**Рис. 4.** Зависимость угловой aberrации излучения  $\Delta\vartheta$  при различных углах падения его на линзу от скорости  $v$  движения линзы.

ра в случае рассмотрения неподвижной линзы составляет 40.78 м, а при движущейся линзе – 155.03 м без учета дисперсии и 155.76 м с учетом дисперсии.

На рис. 3 изображена зависимость  $\delta l(\vartheta_0)$ . Левая часть графика соответствует случаю, когда луч падает справа, а правая часть графика – когда луч падает слева при условии, что линза движется вправо. Из этого графика можно определить, как сильно влияет кинематический эффект на величину отклонения луча на земной поверхности относительно детектора.

На рис. 4 приведена зависимость изменения величины угловой aberrации от скорости движения линзы. Как видно из приведенного графика, с увеличением скорости при разных углах падения излучения на линзу будет наблюдаться линейный рост величины угловой aberrации излучения. Также можно заметить, что при углах падения, находящихся в интервале от  $0^\circ$  до примерно  $2^\circ$ , график, описывающий изменение угловой aberrации от скорости, будет располагаться ниже аналогичного, соответствующего падению под  $0^\circ$ , что говорит об отклонении луча в другую сторону. Это приводит к многолучевой интерференции, которая пока не учитывается в построенной математической модели.

Наличие скорости движения линзы приводит к нарушению симметрии распространения луча внутри линзы, что не наблюдается при отсутствии скорости ее движения. Это, в свою очередь, приводит к перемешиванию “правых” и “левых” лучей, падающих под разными углами, перераспределению интенсивности отраженного линзой

сигнала в плоскости наблюдения на земной поверхности и к изменению отношения сигнал/шум в расчетной области установки приемника излучения [14, 15].

### ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ

На движущихся границах раздела происходит изменение частоты преломленной (или отраженной) волн, поэтому в общем случае расчеты необходимо выполнять с учетом эффекта Доплера.

Для учета дисперсии материала в построенной математической модели была использована зависимость показателя преломления от длины волны излучения  $\lambda$ :

$$n(\lambda) = \left( A_1 + A_2\lambda^2 + \frac{A_3}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \frac{A_5}{\lambda^6} + \frac{A_6}{\lambda^8} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

где  $A_m$ ,  $m = 1, \dots, 6$  – дисперсионные коэффициенты, характерные для выбранного материала.

Дисперсионное уравнение (2) совместно с (13) приводится к алгебраическому уравнению 12-й степени по частоте электромагнитной волны

$$\begin{aligned} & A_6\omega^{12} - 2A_6P\omega^{11} + (4A_5\pi^2c^2 + A_6P^2)\omega^{10} - \\ & - 8A_5\pi^2c^2P\omega^9 - 128A_3\omega^5\pi^6c^6P + \\ & + (16A_4\pi^4c^4 + 4A_5\pi^2c^2P^2)\omega^8 - 32A_4\pi^4c^4P\omega^7 + \\ & + (16A_4\pi^4c^4P^2 + 64A_3\pi^6c^6)\omega^6 + \\ & + (64A_3\pi^6c^6P^2 - 256\pi^8c^8u_1^2 + 256A_1\pi^8c^8)\omega^4 + \\ & + (-512A_1\pi^8c^8P + 512c^8\pi^8P)\omega^3 + \\ & + (256k^2u_1^2c^8\pi^8 - 256c^8\pi^8P^2 + 256A_1\pi^8c^8P^2 - \\ & - 256k^2\pi^8c^{10} + 1024A_2\pi^{10}c^{10})\omega^2 - \\ & - 2048A_2\pi^{10}c^{10}P\omega + 1024A_2\pi^{10}c^{10}P^2 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $P = (\mathbf{k}, \mathbf{u}_1)$ .

Решение уравнения было получено двумя численными методами.

Для ускорения численных расчетов сначала, в нулевом приближении, находилось бездисперсионное решение (3), (4) и определялась частота  $\omega$ , после чего численно решалось уравнение (14). Точное численное решение было получено с использованием языка *Python* [16] и модуля для численных вычислений *NumPy* [17].

Также для повышения достоверности и исследования эффективности вычислений применялся альтернативный метод рекуррентных вычислений. Он заключался в том, что на первом шаге использовалось бездисперсионное приближение (3), (4). Затем определялась новая частота в среде, и расчет повторялся заново для нового показателя преломления на этой частоте. Расчеты показали, что решение достаточно быстро сходится, и необ-

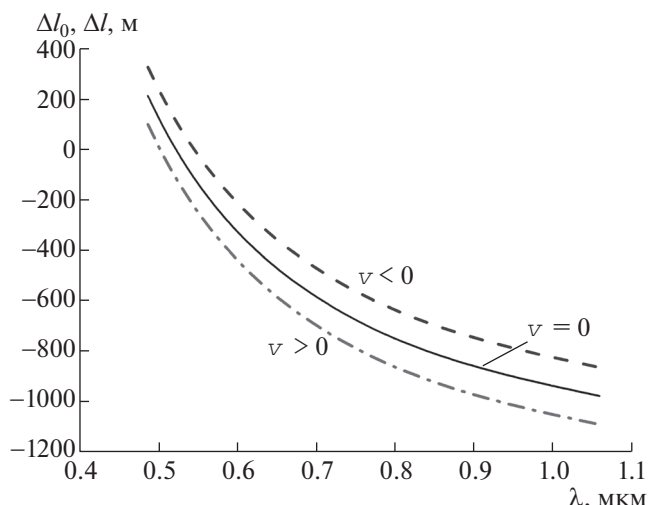


Рис. 5. Зависимость отклонения луча  $\Delta l_0$  и  $\Delta l$  на земной поверхности от длины волны падающего излучения  $\lambda$  при падении излучения на линзу под углом  $1^\circ$  для случаев  $v > 0$  (штрихпунктир),  $v = 0$  (сплошная линия),  $v < 0$  (штриховая линия).

ходимая точность достигается уже после третьей итерации.

В результате расчетов, проведенных двумя методами, получены значения оптических частот, абсолютная погрешность которых составляет не более  $10^{-5}$  Гц. Решение было последовательно получено на каждой границе раздела и затем использовалось для определения угловой аберрации.

Численные расчеты проводились для трех случаев: при отсутствии скорости движения линзы, при наличии скорости движения линзы без учета дисперсии и с учетом дисперсии материала.

Так, в результате численных расчетов для угла падения  $\vartheta_0 = 1^\circ$  в случае покоящейся линзы угловая аберрация прошедшего излучения составила  $\Delta\vartheta_0 = 0.0027^\circ$ , а соответствующее отклонение луча относительно детектора на земной поверхности  $\Delta l_0 = 40.786$  м.

При наличии скорости движения (бездисперсионное приближение) для того же угла падения аберрация составила  $\Delta\vartheta = 0.0105^\circ$ , а соответствующее отклонение луча относительно детектора на земной поверхности  $\Delta l = 154.036$  м.

Также было проведено сравнение влияния дисперсии используемых материалов. Применяемые в линзе материалы, крон LK6 и флинт TF5, обладают нормальной дисперсией области  $\lambda = 532$  нм. При учете дисперсии материала величина дополнительной аберрации составила  $\delta\vartheta = 0.0001^\circ$ , а соответствующее отклонение луча относительно детектора –  $\delta l = 0.589$  м. Таким обра-

зом, в результате проведенных расчетов оказалось, что дисперсия материала оказывает влияние на рассчитываемые величины угловой абберрации и отклонения лучей относительно диктора на земной поверхности.

На рис. 5 построена зависимость отклонения луча на земной поверхности от длины волны излучения при фиксированном угле падения  $\vartheta_0 = 1^\circ$ . Полученные зависимости были построены для трех случаев: при отсутствии скорости движения линзы и при наличии скорости движения в положительном направлении оси  $Ox$  и в отрицательном направлении оси  $Ox$ .

Исходя из построенных зависимостей, можно сделать вывод о том, что для выбранных материалов предпочтительный рабочий диапазон длин волн источника излучения находится в интервале  $\lambda = 480\text{--}532$  нм. В этой области длин волн отклонение луча на земной поверхности будет минимальным. Заметим, что в реальном отраженном пучке присутствуют лучи с углами падения, большими, чем  $\vartheta_0 = 1^\circ$ , но их вклад тем меньше, чем больше угол падения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных численных расчетов были построены зависимости углового отклонения отраженных лучей  $|\Delta\vartheta_0(\vartheta_0)|$ ,  $|\Delta\vartheta(\vartheta_0)|$ . Вид этих графиков, изображенных на рис. 2, позволяет установить область, определенную интервалами углов падения  $\vartheta_0^{\max} = \pm(1.5\text{--}2.5^\circ)$ . В этой области будет зарегистрирована наибольшая интенсивность пучка. Отраженные “правые” и “левые” лучи при заданном  $|\Delta\vartheta_0|$  стремятся в разные направления отражения.

Отклонение лучей на земной поверхности вследствие скорости движения для параметров спутника Блиц при  $\vartheta_0 = 1^\circ$  равно  $\delta\Delta l = \Delta l - \Delta l_0 = 113.25$  м. Дополнительная абберрация вследствие дисперсии материала линзы имеет порядок  $\delta l = 0.6$  м (рис. 3).

Была построена зависимость изменения величины угловой абберрации от скорости движения линзы (рис. 4). Согласно полученным графикам, наблюдается линейный рост угловой абберрации при увеличении скорости.

Анализ показал, что дисперсия материала влияет на величину угловой абберрации лучей и смещение лучей в плоскости регистрации на земной поверхности, однако вклад этого эффекта на два порядка меньше, чем угловая абберрация, вызванная скоростью движения.

Расчеты указывают на необходимость учета эффектов оптики движущихся сред в рассматриваемой задаче. Эти эффекты приводят к про-

странственному смещению световых лучей в зоне приема на десятки и даже сотни метров, а также к их перемешиванию, что в конечном счете может влиять на точность определения пространственно-временных координат космических аппаратов, входящих в состав ГЛОНАСС.

Полученная математическая модель и разработанный программный комплекс позволяют выбрать оптический материал, а также источник лазерного излучения с наименьшим влиянием эффектов оптики движущихся сред. В дальнейшем планируется провести расчеты для разных положений спутника по отношению к линии горизонта с учетом интерференции лучей, отраженных линзой Люнеберга, а также с учетом эффекта искривления и зависимости поляризации лучей от скорости движения линзы [18, 19].

Результаты работы могут быть применены при разработке и создании микроспутников нового поколения, используемых для функционального геодезического обеспечения ГЛОНАСС, а также для осуществления современных тестов теории относительности и электродинамики.

Авторы благодарны В.П. Васильеву и А.Л. Соколову за предоставленные данные и стимулирующие обсуждения работы в ходе ее выполнения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Otsubo T., Kunimori H., Noda H., Hanada H.* // Adv. Space Res. 2010. V. 45. P. 733–740.
2. *Handerek V., McArdle H., Williams T., Psaila N., Laycock L.* // Proc. SPIE. 2005. V. 5986. doi 10.1117/12.630556
3. *Ancheier N.C., Bernacki B.E., Krishnaswami K.* FY 2007 Miniature Spherical Retroreflectors – Final Report. Pacific Northwest National Laboratory. 2008. P. 1–34.
4. *Ancheier N.C., Bernacki B.E., Klymyshyn N.A., Krishnaswami K., Rodriguez C.P.* FY 2008 Miniature Spherical Retroreflectors – Final Report. Pacific Northwest National Laboratory. 2009. P. 1–32.
5. *Ancheier N.C., Bernacki B.E., Qiao H.A.* FY 2011 Miniature Spherical Retroreflectors – Final Report. Pacific Northwest National Laboratory, 2011. P. 1–26.
6. *Bernacki B.E., Ancheier N.C., Krishnaswami K., Cannon B.D.* // Proc. SPIE. 2008. V.6940. P. 1–7.
7. *Vasiliev V.P., Gashkin I.S., Belov M.S., Shargorodsky V.D.* // Proc. 11th International Workshop on Laser Ranging. Deggendorf, Germany. 1998. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://cddis.gsfc.nasa.gov/lw11/>
8. *Shargorodsky V.D., Vasiliev V.P., Soyuzova N.M., Burmistrov V.B., Gashkin I.S., Belov M.S., Khorosheva T.I., Nikolaev E.A.* // Proc. 12th International Workshop on Laser Ranging. Matera, Italy, 2000. Электронный ресурс. Режим доступа: [http://cddis.gsfc.nasa.gov/lw12/docs/Shargorodsky\\_et\\_al\\_Spherical%20Retroreflector.pdf](http://cddis.gsfc.nasa.gov/lw12/docs/Shargorodsky_et_al_Spherical%20Retroreflector.pdf)
9. *Burmistrov V.B., Parkhomenko N.N., Roy Y.A., Shargorodsky V.D., Vasiliev V.P., Degnan J.J., Habib S., Glo-*



- tov V.D., Sokolov N.L.* // Proc. 13th International Workshop on Laser Ranging. Washington DC, USA, 2002. Электронный ресурс. Режим доступа: [http://cddis.gsfc.nasa.gov/lw13/docs/papers/target\\_vasiliev\\_1m.pdf](http://cddis.gsfc.nasa.gov/lw13/docs/papers/target_vasiliev_1m.pdf)
10. *Burmistrov V.B., Parkhomenko N.N., Shargorodsky V.D., Vasiliev V.P.* // Proc. 14th International Workshop on Laser Ranging. San Fernando, Spain, 2004. Электронный ресурс. Режим доступа: [http://cddis.gsfc.nasa.gov/lw14/docs/papers/tar3a\\_vbm.pdf](http://cddis.gsfc.nasa.gov/lw14/docs/papers/tar3a_vbm.pdf)
  11. *Shargorodsky V.D., Vasiliev V.P., Belov M.S., Gashkin I.S., Parkhomenko N.N.* // Proc. 15th International Workshop on Laser Ranging, Canberra, Australia, 2006. P. 566–570. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://cddis.gsfc.nasa.gov/lw15/docs/papers/Spherical%20Glass%20Target%20Microsatellite.pdf>
  12. *Kucharski D., Kirchner G., Hyung-Chul Lim, Koidl F.* // Adv. Space Res. 2011. V. 48. P. 1335–1340.
  13. *Болотовский Б.М., Столяров С.Н.* // УФН. 1989. Т. 159. № 1. С. 155–180.
  14. *Гладышев В.О., Тиунов П.С., Леонтьев А.Д., Гладышева Т.М., Шарандин Е.А.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. № 11. С. 54–63.
  15. *Гладышев В.О., Гладышева Т.М., Дашко М., Трофимов Н., Шарандин Е.А.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. № 21. С. 16–24.
  16. *Lutz M.* Learning Python. O'Reilly Media. 5-th Edition. 2013.
  17. *Bessert E.* SciPy and NumPy. O'Reilly Media. 2013. P. 82.
  18. *Гладышев В.О., Портнов Д.И., Кауц В.Л., Шарандин Е.А.* // Опт. и спектр. 2013. Т. 115. № 3. С. 398–405.
  19. *Гладышев В.О., Портнов Д.И.* // ЖТФ. 2015. Т. 85. № 4. С. 97–104.